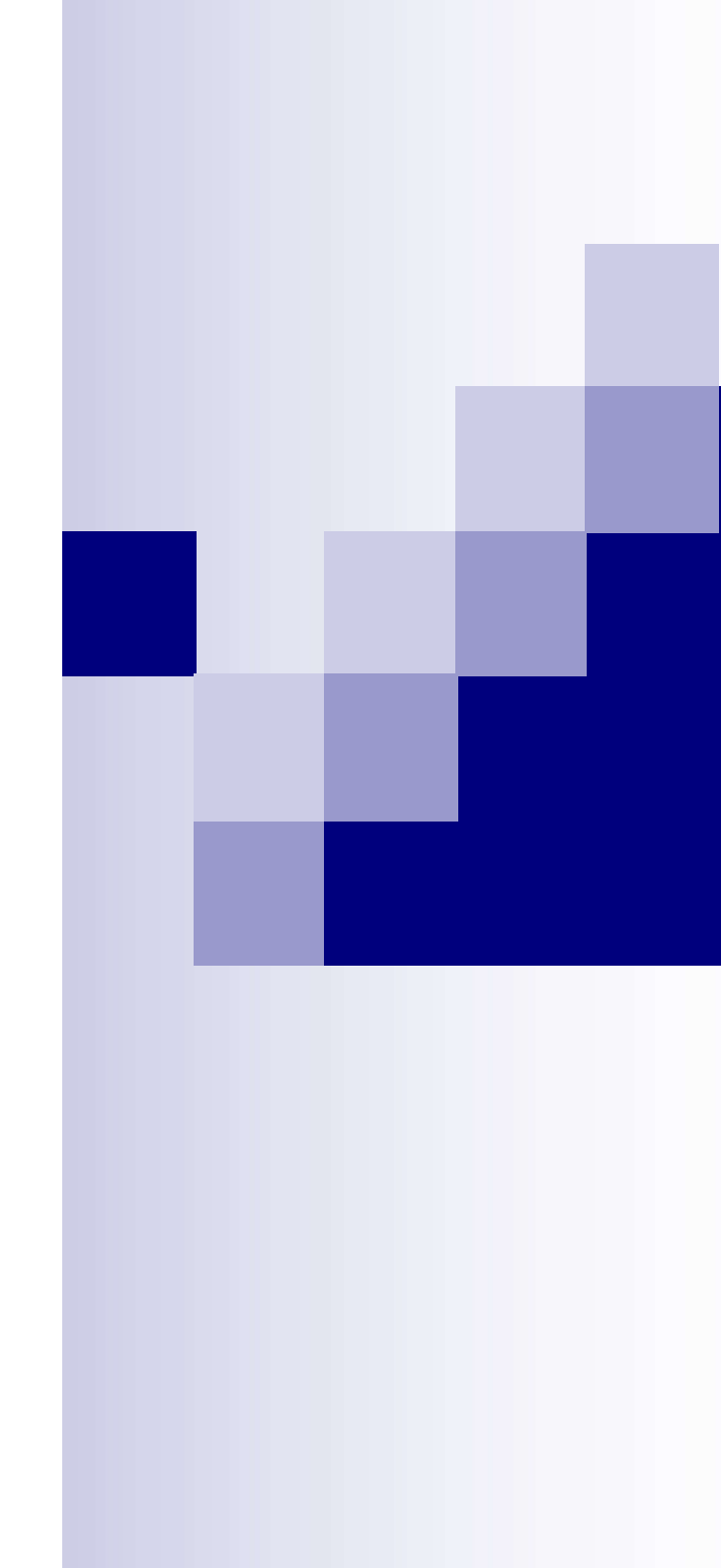




Фурье қатары және интегралы қасиеттері



Мақсаты

- Студенттерді Фурье қатары және интегралдық қасиеттерін қолдануды үйрету.
- Сигналдардың құрамын және сигнал спектріне талдау жасауды және соған қатысты есептерді және мәселелерді шешу.

Ортонормаланған базистік функция

Суретте $L_2(T)$ кеңістігінде квадраттық интегралданатын $x(t)$ үздіксіз функциясын кез келген ортонормаланған базистік функциялар жүйесі $\{\psi_j(t)\}$ арқылы көрсету формуласы берілген.

Формула мынадай:

$$\int_{-T}^T \psi_j(t) \psi_i(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases}$$

Бұл ортонормаланған базистің қасиеті, оны $x(t)$ функциясын жіктеу үшін қолданады.

Ортонормаланған базистік функциялардың қарапайым мысалы ретінде **Фурье қатарын** алайық.

Фурье базисі:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \quad \psi_{-n}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

мұндағы $n = 1, 2, 3, \dots$

Бұл функциялар **ортонормаланған**, яғни:

$$\int_{-T}^T \psi_m(t) \psi_n(t) dt = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Бұл қасиет Фурье қатары арқылы кез келген $x(t)$ функциясын жіктеуге мүмкіндік береді:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(t),$$

мұндағы **Фурье коэффициенттері**:

$$c_n = \int_{-T}^T x(t) \psi_n(t) dt.$$

Фурье қатары

Базис $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = -\infty, \infty \right\}$

$L_2(T)$ Кеңістігі үшін толық болады

$$x(t) \in L_2(T) \quad \longrightarrow \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

Фурье қатары, оның формалары, спектрлердің қасиеттері

$$x(t) \in L_2(T) \quad \longrightarrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

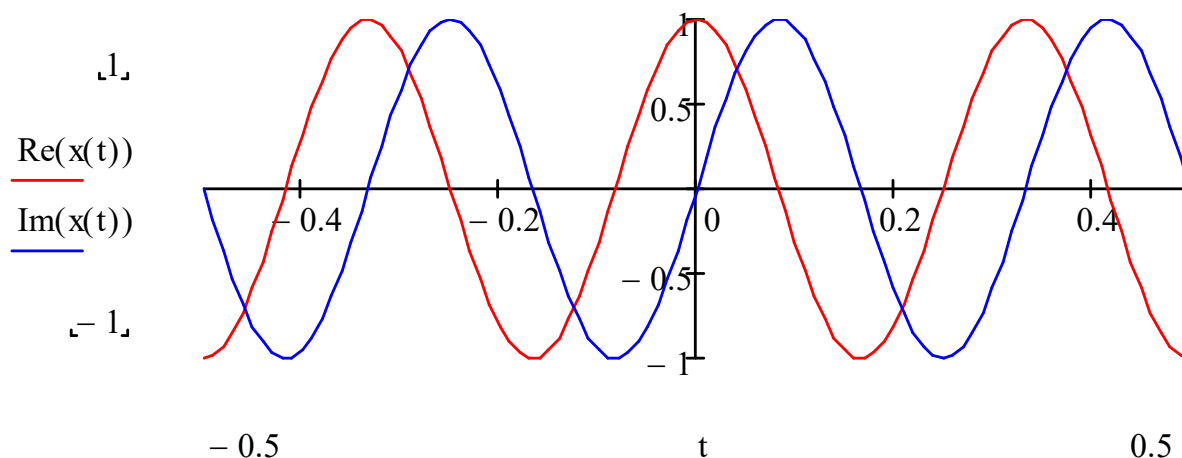
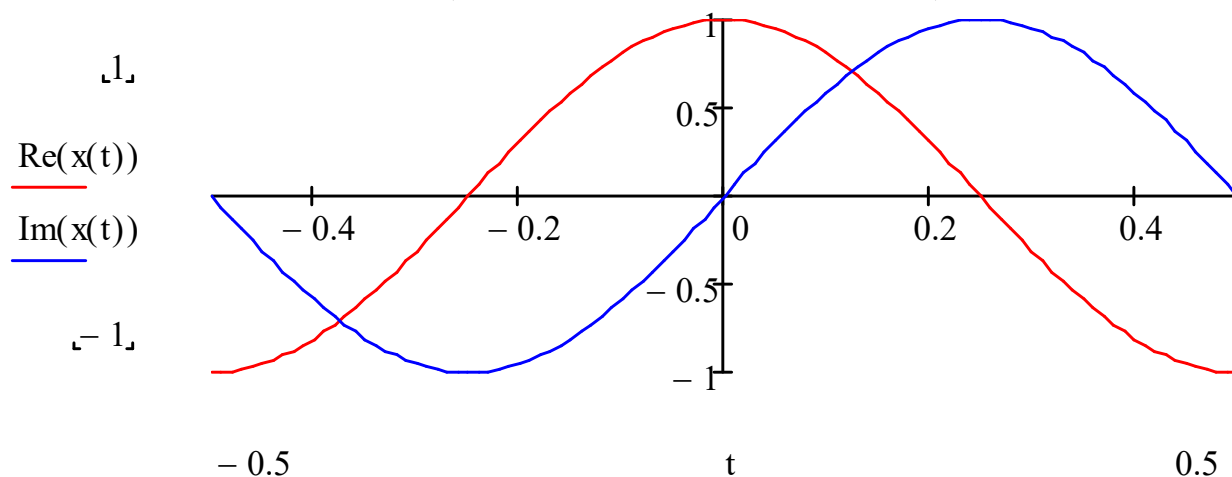
Парсеваль теңдігі

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

Фурье қатары, оның формалары, спектрлердің қасиеттері

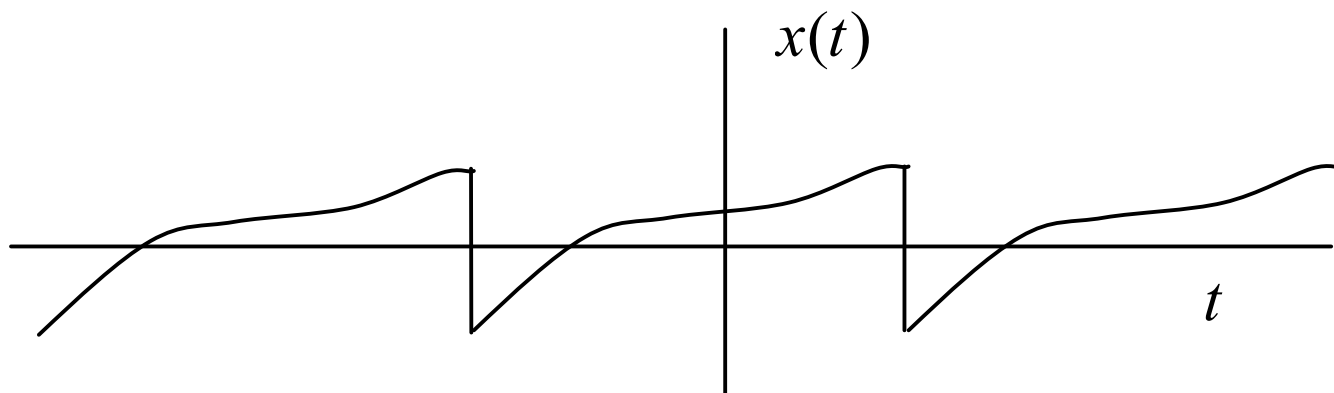
Базистік функциялар $\left\{ e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = \overline{-\infty, \infty} \right\}$ егер $t \in (-T/2, T/2)$



Фурье қатары, оның формалары, спектрлердің қасиеттері

Базистік функциялар $\left\{ e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = \overline{-\infty, \infty} \right\}$ $t \in (-\infty, \infty)$ кезінде периоды

T олардың кезеңдерінің ең кіші ортақ еселігі болып табылады



Фурье қатары шекті аралықтағы сигналды және оның бүкіл ось бойынша периоды жалғасын көрсетеді. $t \in (-\infty, \infty)$

Бұл жағдайда спектрлік коэффициенттер бірдей формулалар арқылы табылады!

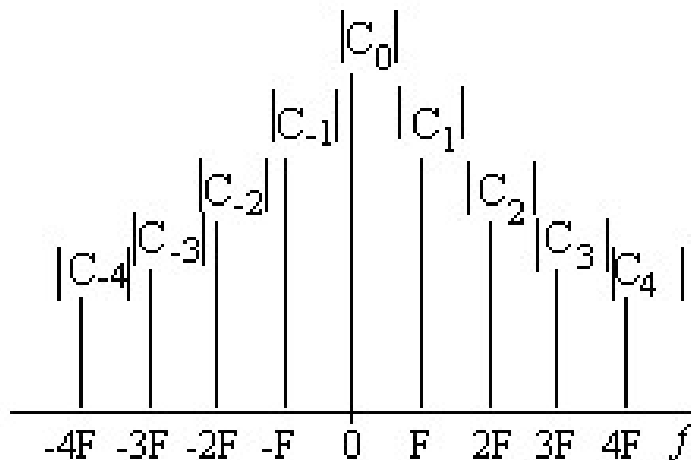
Комплексті Фурье қатары

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

жалпы жағдайда комплексті

$$\{|C_k|, k = -\infty, \infty\}$$

Амплитудалық спектр

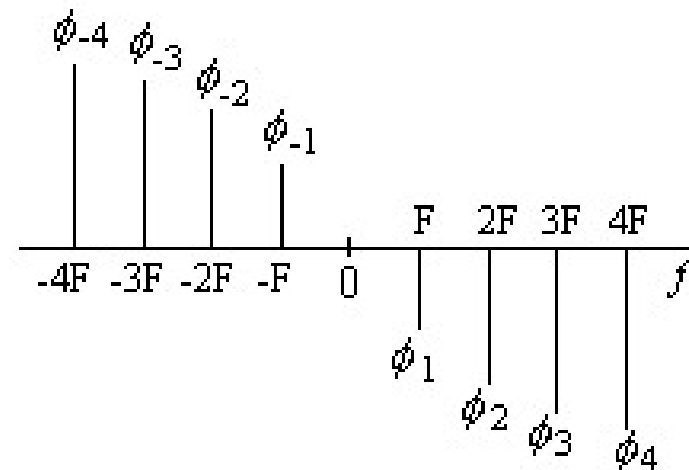


$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

$$C_k = |C_k| e^{j\varphi_k}$$

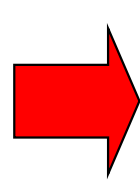
$$\{\varphi_k, k = -\infty, \infty\}$$

Фазалық спектр



Комплексті Фурье қатары

Нақты сигнал

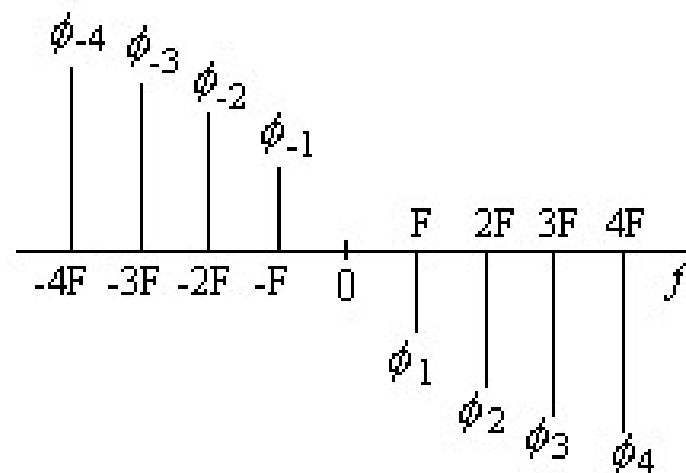
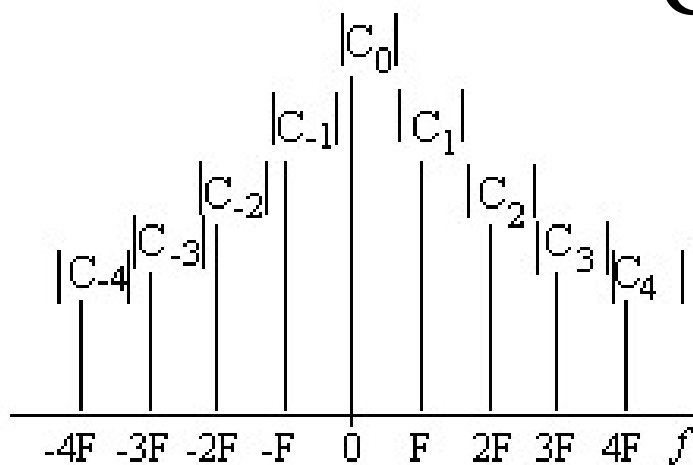


амплитудалық спектр жұп
фазалық спектр тақ

$$x^*(t) = x(t)$$

$$C_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \right)^* = C_k^*$$

$$C_{-k} = C_k^*$$



Фурье қатарының тригонометриялық түрі

Жұпты қосайық

$$\begin{aligned} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} &= C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_k^* e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \\ &= |C_k| e^{j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + |C_k| e^{-j\varphi_k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = 2|C_k| \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right) \end{aligned}$$

Сонда Фурье қатарын тригонометриялық түрде жазуға болады

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right), \\ A_k &= \begin{cases} 2|C_k|, & k \neq 0, \\ A_k = |C_k| = C_0, & k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Фурье қатарының тригонометриялық түрі

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) dt, \quad k = \overline{0, \infty}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) dt, \quad k = \overline{1, \infty}$$

Фурье қатарының тригонометриялық түрі

Екі функциялардың жұбын қосайық

$$\begin{aligned} a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt &= \\ &= a_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} kt} + e^{-j\frac{2\pi}{T} kt}}{2} + b_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} kt} - e^{-j\frac{2\pi}{T} kt}}{2j} = \\ &= \frac{a_k - jb_k}{2} e^{j\frac{2\pi}{T} kt} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-j\frac{2\pi}{T} kt} \\ &= C_k e^{j\frac{2\pi}{T} kt} + C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{T} kt} \end{aligned}$$

Фурье қатарының тригонометриялық түрі

$$\frac{a_k - jb_k}{2} = C_k \qquad \frac{a_k + jb_k}{2} = C_{-k}$$

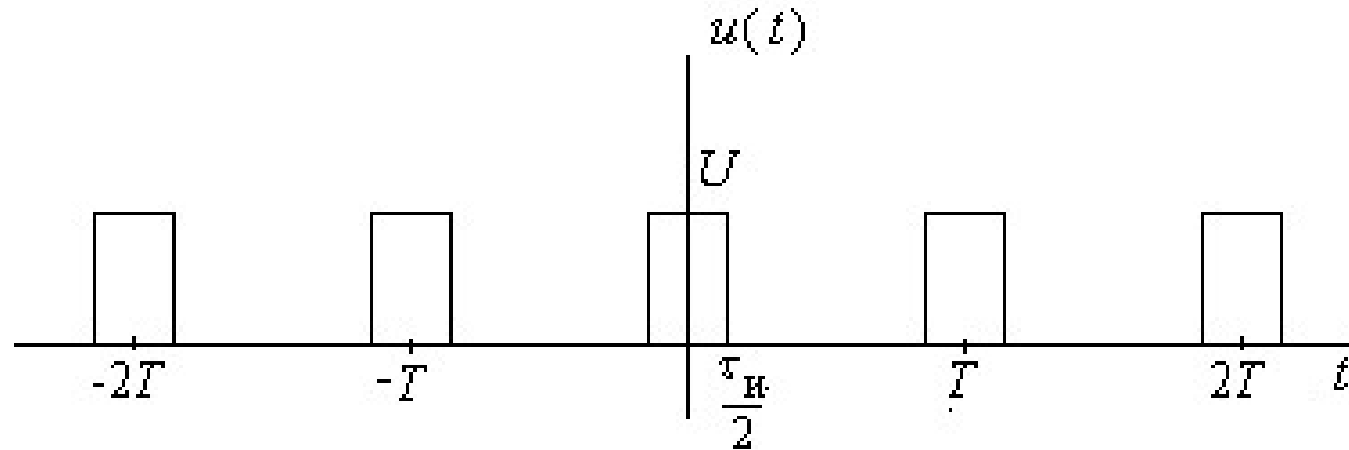
Осыдан мынадай байланыс шығады

$$|C_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} \qquad C_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \varphi_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}$$

*сигнал жұп - барлық синусоидалы компоненттер 0-ге тең;
сигнал тақ - барлық косинус компоненттері нөлге тең (бұл жағдайда тұрақты компонент те нөлге тең)*

Мысалы.



$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau_{и}/2}^{\tau_{и}/2} U \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt = \frac{U\tau_{и}}{T} \frac{\sin \frac{k\Omega\tau_{и}}{2}}{\frac{k\Omega\tau_{и}}{2}}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F \quad \text{айналмалы импульс жиілігі}$$

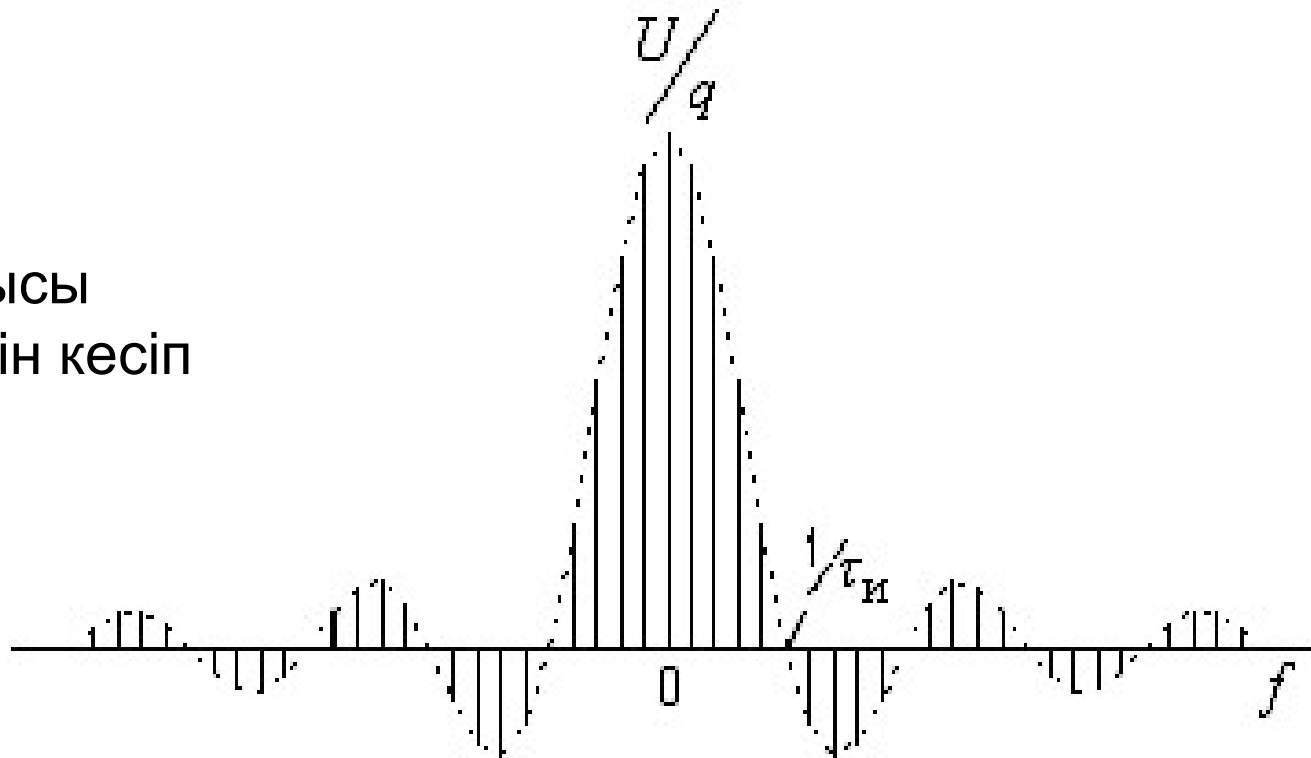
$$F = 1/T \quad \text{циклдік импульс жиілігі}$$

$$C_0 = \frac{U\tau_{и}}{T} = U/q \quad q = T/\tau_{и} \quad \text{импульстік тізбектің қалыңдығы}$$

$$\frac{\omega \tau_{\text{и}}}{2} = \pi$$

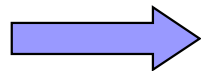
Кезінде ораушысы
бірінші рет x осін кесіп
өтеді

$$f = 1/\tau_{\text{и}}$$

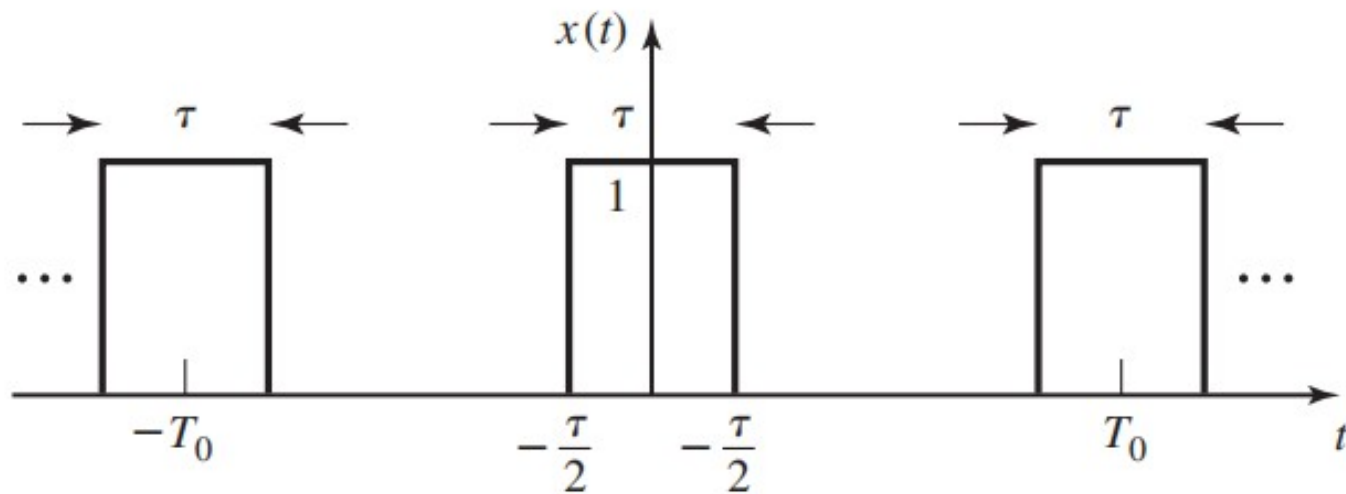


Дискреттер бір-бірінен арқылы $F = 1/T$
бөлінеді

Қалыңдығы
ның сандық
мәні



спектр жапырақшасының
негізгі бөлігінің жарты ені
жиілік осі бойынша спектрлік
компоненттердің қадамынан
неше есе үлкен екендігін
көрсетеді

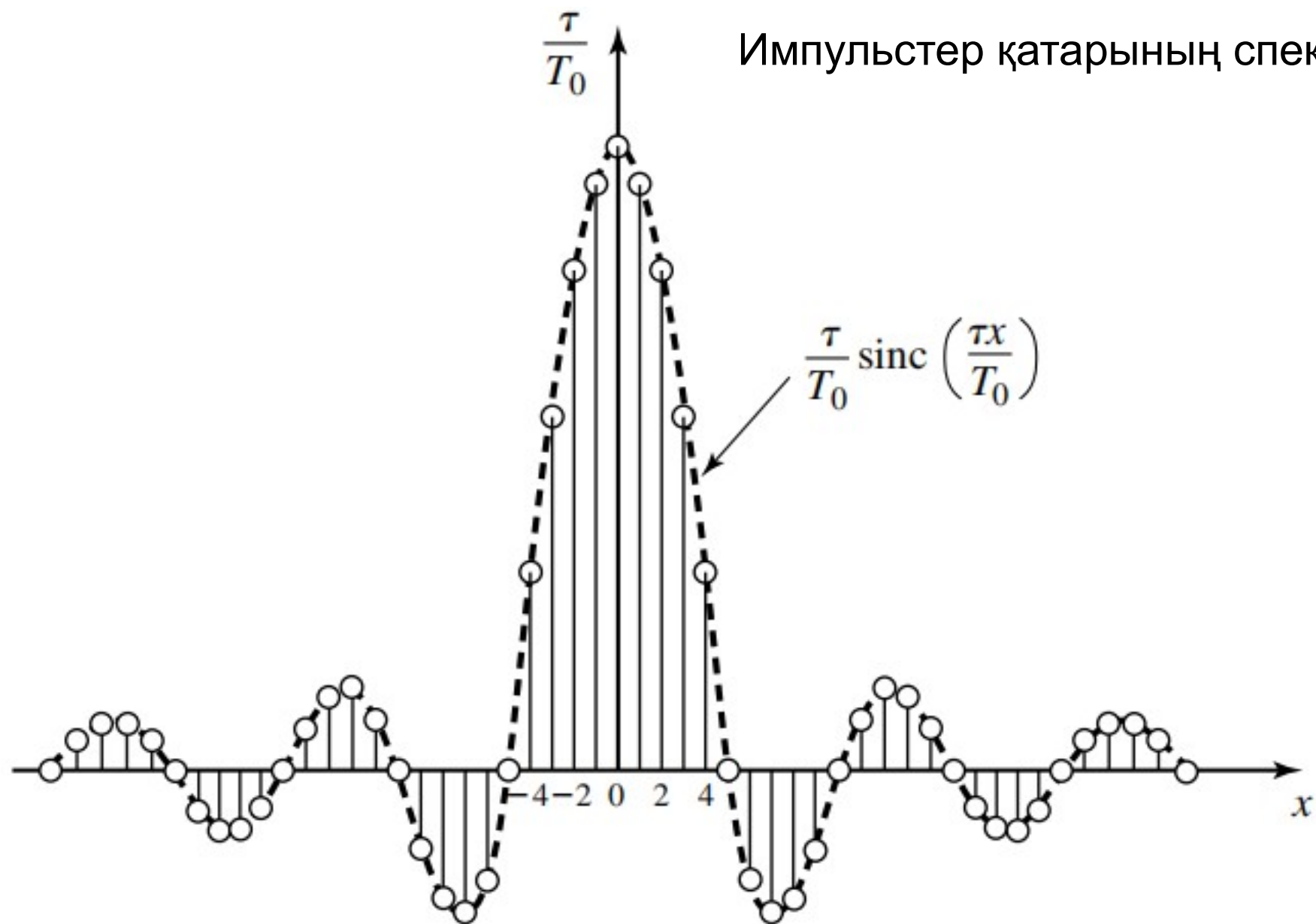


$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right) \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{басқа жағдайда} \end{cases}$$

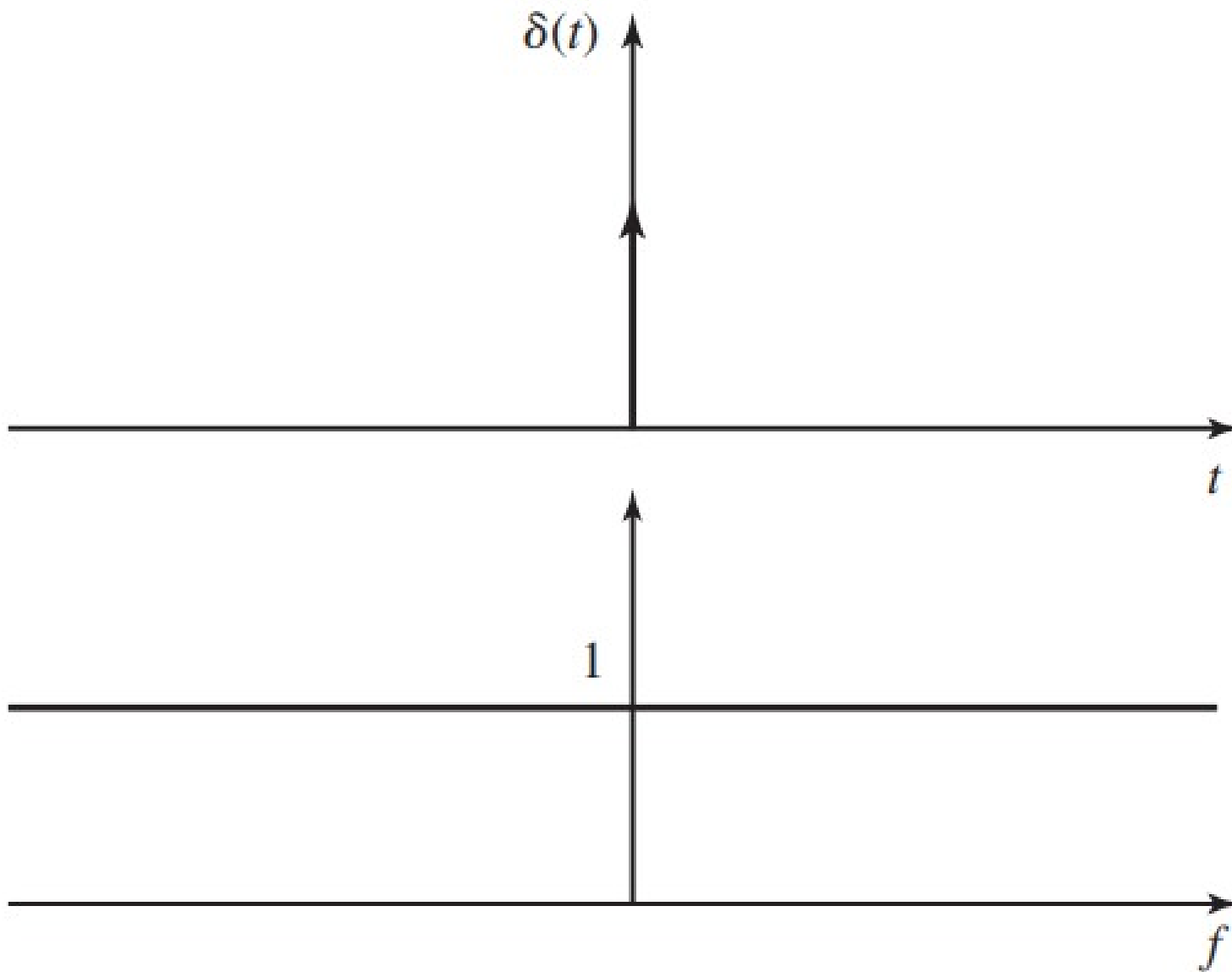
$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn \frac{2\pi t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} 1 e^{-jn \frac{2\pi t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{-jn2\pi} \left[e^{-jn \frac{\pi \tau}{T_0}} - e^{+jn \frac{\pi \tau}{T_0}} \right]$$

$$= \frac{\tau}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$

Импульстер қатарының спектрі



Дельта импульстің спектрі



Сигналдар және олардың спектрлері

$$\delta(t)$$

$$1$$

$$\delta(t - t_0)$$

$$e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & t = \pm \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{sinc}(t)$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq t < 0 \\ -t + 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{sinc}^2(t)$$

$$1$$

$$\delta(f)$$

$$e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\delta(f - f_0)$$

$$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

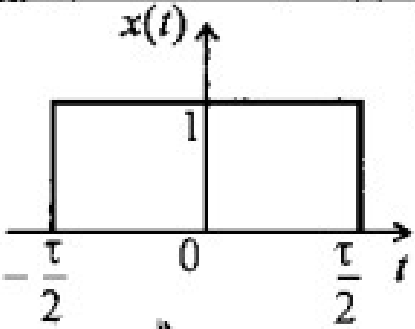
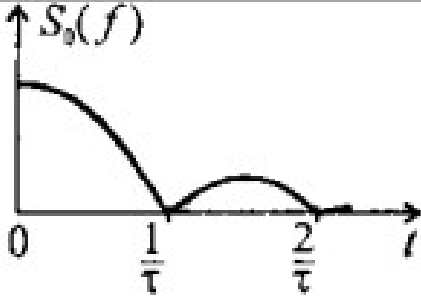
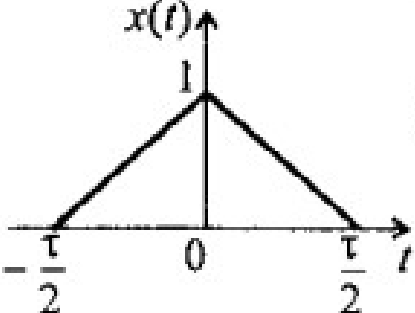
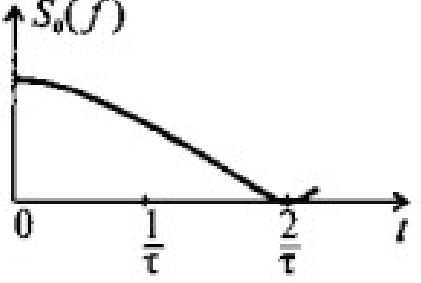
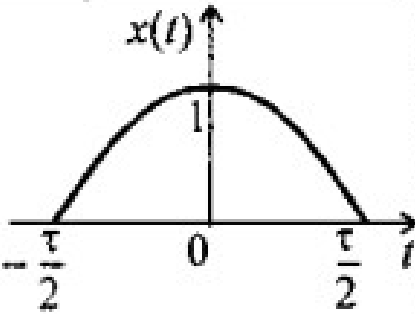
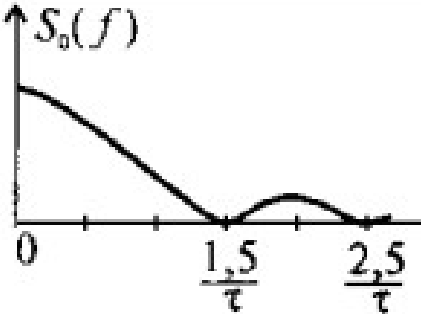
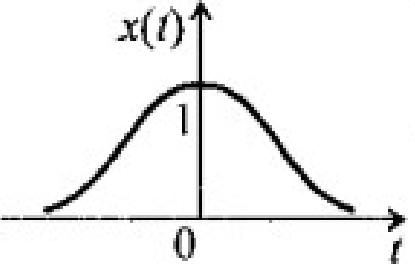
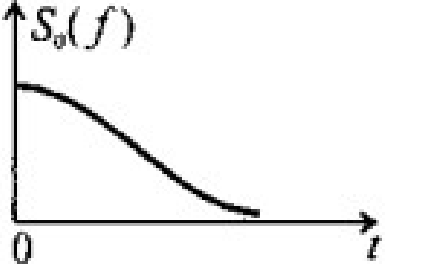
$$-\frac{1}{2j}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2j}\delta(f - f_0)$$

$$\text{sinc}(f)$$

$$\Pi(f)$$

$$\text{sinc}^2(f)$$

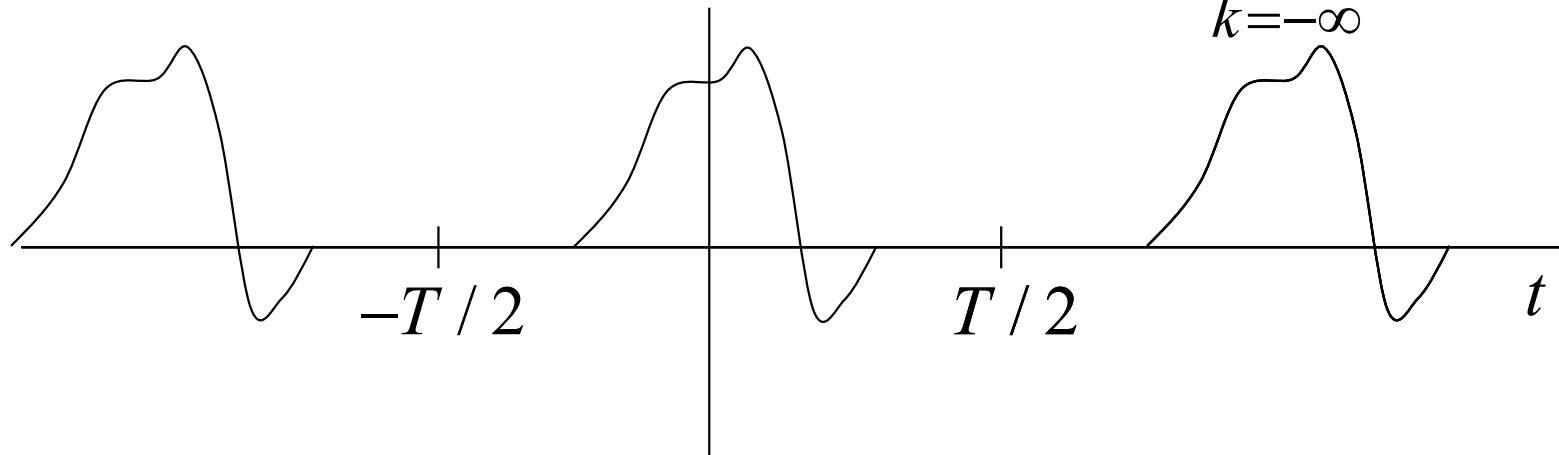
$$\Lambda(f)$$

1	$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$	
2	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 t }{\tau}, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2}$	
3	$x(t) = \begin{cases} \cos\omega_0 t, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{4\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$	
4	$x(t) = e^{-\beta^2 t^2}$		$\frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \cdot e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2}$	

Қатар мен Фурье түрлендіруінің арасындағы байланыс

Импульсті сигнал қарастырайық (ақырлы сигнал) $x(t)$

Спектрлік тығыздығы мынадай $X(f)$ $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t + kT)$



Периодты сигналдың спектрі

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} kt} dt = \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right)$$

The figure shows the spectrum C_k versus frequency f . The horizontal axis is labeled f and has a vertical line at 0 . The spectrum consists of vertical lines (impulses) at discrete frequencies $f = k/T$. The height of each line is C_k . A dashed curve is drawn through the peaks of the lines, representing the envelope of the spectrum. A red arrow points from the f label to the f argument in the equation above.

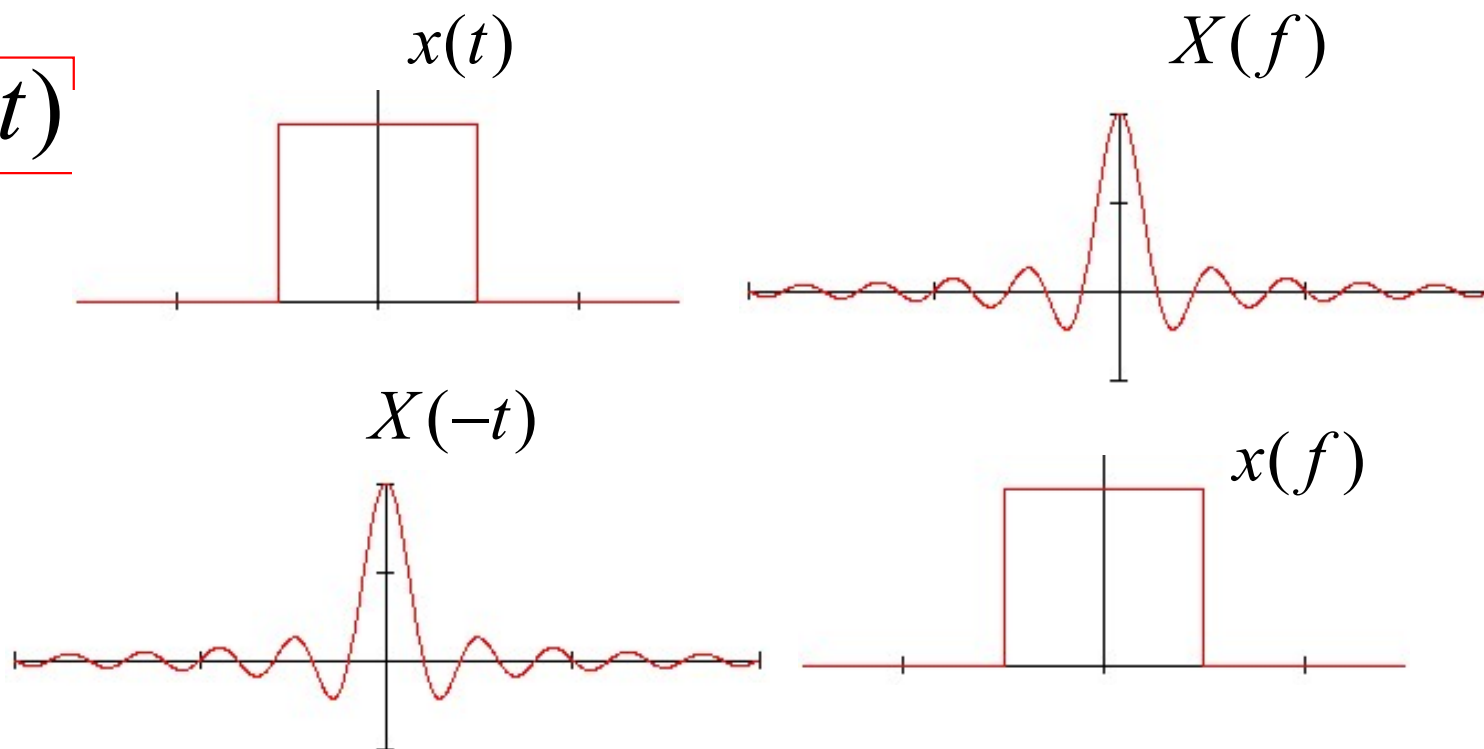
Фурье түрлендіруінің қасиеттері

1. Сызықтық

$$\sum_k \alpha_k x_k(t) \Leftrightarrow \sum_k \alpha_k X_k(f)$$

2. Дуалдылық (уақыт-жиілік симметриясы)

$$x(f) \Leftrightarrow X(-t)$$



Фурье түрлендіруінің қасиеттері

3. Ылғысу (кешігу) теоремасы

$$x_{\tau}(t) = x(t - \tau)$$

$$\begin{aligned} X_{\tau}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f(\theta + \tau)} d\theta = \\ &= e^{-j2\pi f\tau} X(f) \end{aligned}$$

$$x(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f\tau} X(f)$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

4. Масштабтау теоремасы $x_m(t) = x(mt)$

$$m > 0$$

$$\begin{aligned} X_m(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(mt) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f \frac{\theta}{m}} \frac{d\theta}{m} = \frac{1}{m} X\left(\frac{f}{m}\right) \end{aligned}$$

$$m = -\mu < 0$$

$$X_m(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\mu t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f \frac{\theta}{-\mu}} \frac{d\theta}{-\mu} =$$

$$\boxed{x(mt) \Leftrightarrow \left| \frac{1}{m} \right| X\left(\frac{f}{m}\right)} \quad = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi \frac{f}{-\mu} \theta} d\theta = \frac{1}{\mu} X\left(\frac{f}{-\mu}\right)$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

5. Дифференциалдау теоремасы $x_d(t) = dx(t)/dt$

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{blue arrow}} 0$
 $x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)}$$

6. Интегралдау теоремасы

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{X(0)\delta(f)}{2}}$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

7. Модуляция теоремасы

$$e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt = \\ &= X(f - f_0) \end{aligned}$$

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0)$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

8. Конволюция теоремасы

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$$

9. Көбейту теоремасы

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)Y(f - \phi)d\phi = X(f) * Y(f)$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

10. Жорамалды бөлік теоремасы

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad \longrightarrow \quad x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* =$$

$$= X^*(-f)$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

11. Инверсия теоремасы $x_{-}(t) = x(-t)$

$$X_{-}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\theta)e^{j2\pi f\theta} (-d\theta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)e^{-j2\pi(-f)\theta} d\theta = X(-f)$$

$$x(-t) \Leftrightarrow X(-f)$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

Сигнал нақты



$$X(f) = X^*(-f)$$

немесе



$$\left\{ \begin{array}{l} |X(f)| = |X(-f)| \\ \arg X(f) = -\arg X(-f) \end{array} \right.$$

негізінде:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^* =$$

Жорамал бөлігі үшін де осындай:

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^*$$

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

Сигнал нақты



$$X(f) = X^*(-f)$$

немесе



$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{X(f)\} = \operatorname{Re}\{X(-f)\} \\ \operatorname{Im}\{X(f)\} = -\operatorname{Im}\{X(-f)\} \end{cases}$$

Сигнал нақты жұп

$$x(t) = x(-t)$$



$$X(f) = X(-f)$$

$$\operatorname{Im}\{X(f)\} = 0$$



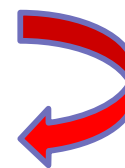
Сигнал нақты тақ

$$x(t) = -x(-t)$$



$$X(f) = -X(-f)$$

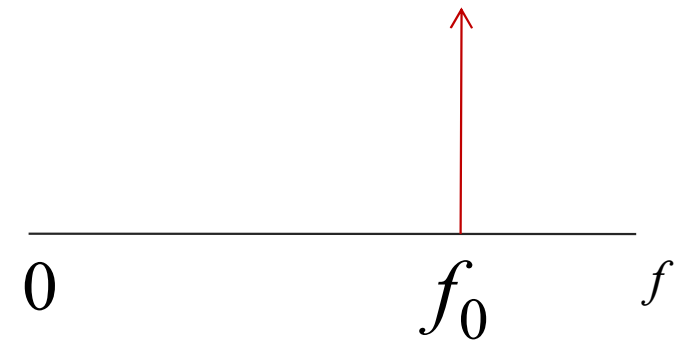
$$\operatorname{Re}\{X(f)\} = 0$$



Гармоникалық сигналдардың спектрлік тығыздығы

$e^{j2\pi f_0 t} \notin L_2(-\infty, \infty) \rightarrow$ әдеттегі мағынада
спектрлік тығыздық жоқ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t}$$



$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Балансты-модулирленген тербеліс

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{X(f + f_0)}{2} + \frac{X(f - f_0)}{2}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

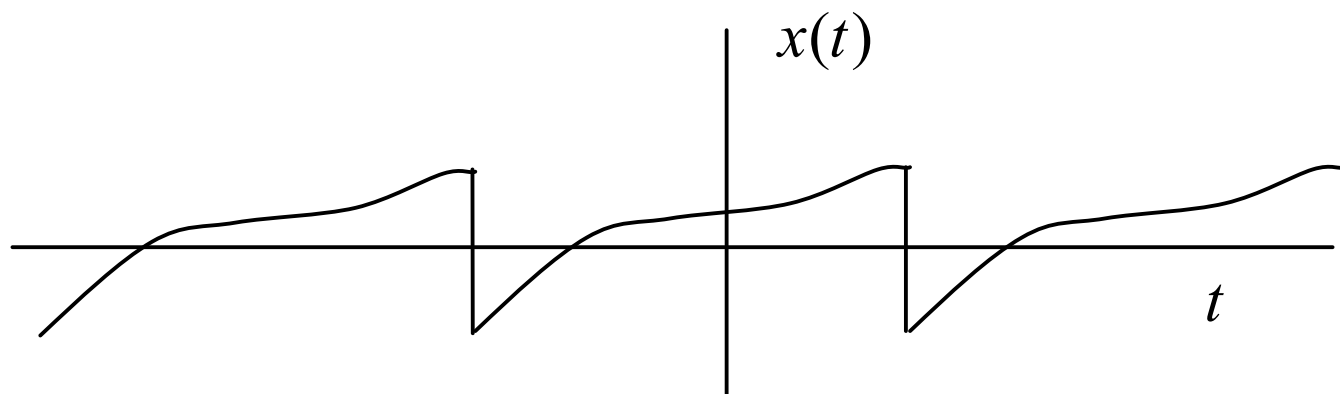
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \delta(f - f_0 - \varphi) d\varphi = X(f - f_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \delta(f + f_0 - \varphi) d\varphi = X(f + f_0)$$

Гармоникалық сигналдардың спектрлік тығыздығы

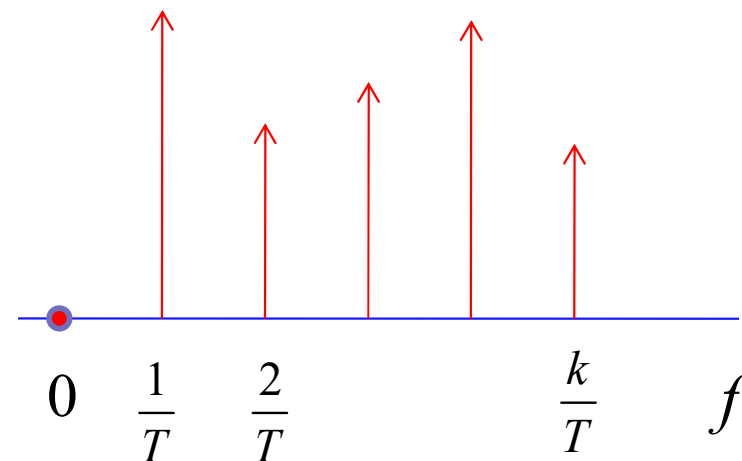
Периодты сигнал

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$



Спектрлік тығыздық

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta\left(f - k\frac{2\pi}{T}\right)$$



Бақылау сұрақтары

1. Комплексті Фурье қатары туралы жазыңыз.
2. Импульстік тізбектің спектрлік тығыздығы.
3. Қатар мен Фурье түрлендіруінің арасындағы байланыс туралы жазыңыз.
4. Фурье түрлендіруінің сызықтық және дуалдылық қасиеттері туралы жазыңыз.
5. Фурье түрлендіруінің ығысу (кешігу) теоремасын жазыңыз.
6. Фурье түрлендіруінің масштабтау теоремасын жазыңыз.
7. Фурье түрлендіруінің интегралдау және дифференциалдау теоремасын жазыңыз.
8. Фурье түрлендіруінің модуляциялау теоремасын жазыңыз.
9. Фурье түрлендіруінің көбейту және конволюция теоремасын жазыңыз.
10. Фурье түрлендіруінің жорамалды бөлік және инверсия теоремасын жазыңыз.
11. Гармоникалық сигналдардың спектрлік тығыздығы туралы жазыңыз

Есептер

1.

Сигнал:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \cos(2\omega t + \pi/2)$$

мұнда:

- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — сигналдың айналмалы жиілігі,
- T — сигналдың периоды,
- A және B — оң тұрақты шамалар.

Тапсырма:

1. Сигналды комплекстік Фурье қатары түрінде жазу.
2. Спектралдық диаграммаларды (амплитудалық және фазалық) тұрғызу.

2.

Тікбұрышты импульстің спектралдық тығыздығын табу қажет.

Сигнал:

$$r(t) = \sigma(t + 1/2) - \sigma(t - 1/2)$$

мұнда:

- $A > 0, \tau > 0$ — тұрақтылар.

Тапсырма:

1. Уақыттық функцияның және спектралдық тығыздықтың графиктерін тұрғызу.
2. Сол масштабта $Ar(2t/\tau)$ импульсі үшін де уақыттық функция мен спектралдық тығыздықтың графиктерін тұрғызу.

3.

Берілген импульстік сигнал $s(t)$ үшбұрышты формаға ие және былай сипатталады:

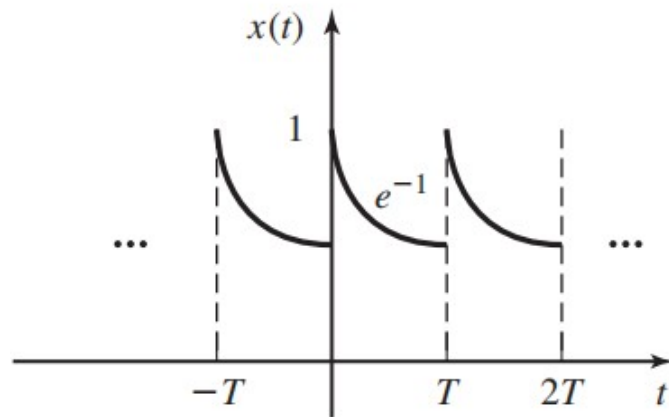
$$s(t) = \begin{cases} A \frac{2t}{\tau_i}, & 0 \leq t \leq \frac{\tau_i}{2}; \\ A \left(2 - \frac{2t}{\tau_i}\right), & \frac{\tau_i}{2} \leq t \leq \tau_i; \\ 0, & \text{басқа жағдайларда.} \end{cases}$$

Мұнда:

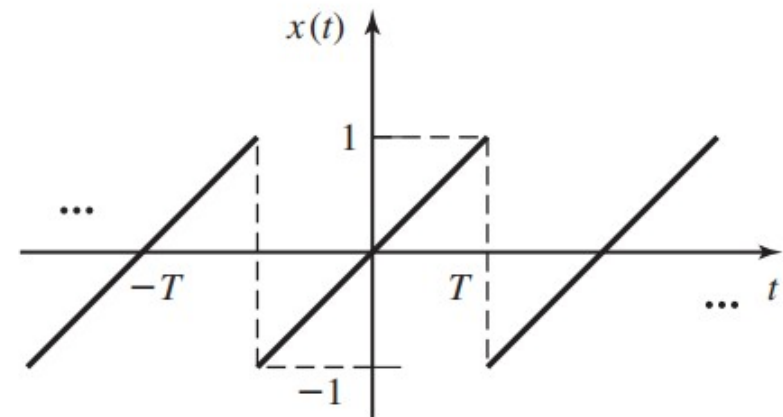
- A — амплитуда,
- τ_i — импульстің ұзақтығы.

1. Фурье түрлендіруін есепте

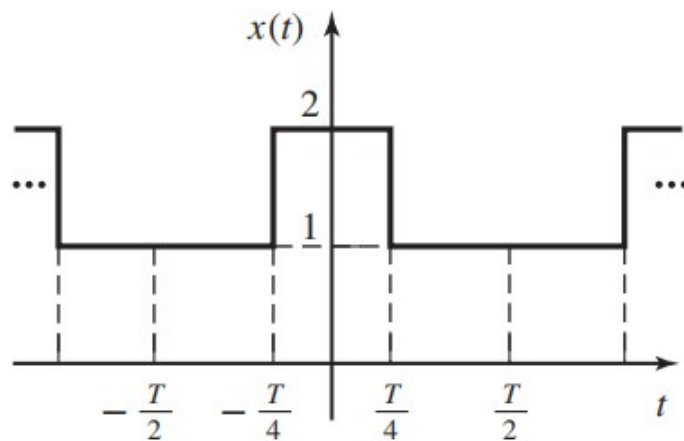
4. Суреттердегі көрсетілген сигналдардың спектрлерін анықтаңыз.



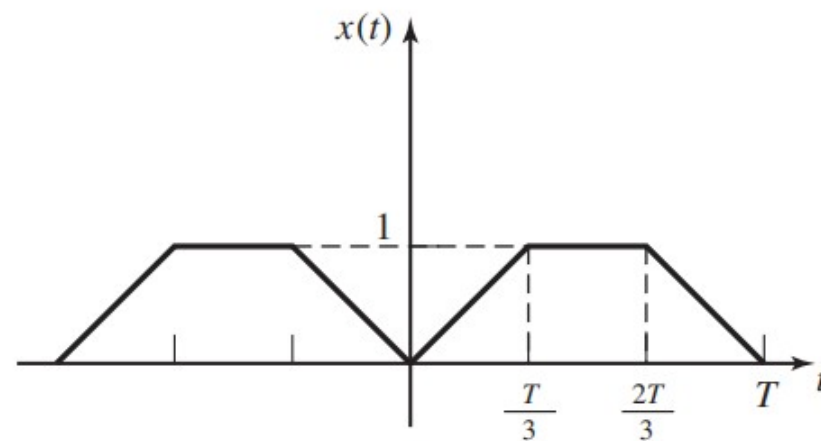
(a)



(b)



(c)



(d)

5.

Берілген сигнал:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{басқа жағдайларда.} \end{cases}$$

Тапсырмалар:

1. Фурье түрлендіруін есептеңіз.
2. Спектралдық тығыздығын анықтаңыз.
3. τ ұзақтығы артқанда спектр қалай өзгереді?

6.

Берілген гармоникалық сигнал:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t).$$

Тапсырмалар:

1. Фурье түрлендіруін есептеңіз.
2. Спектральдық диаграмманы тұрғызыңыз.
3. Егер сигнал жиілігі f_0 екі есе артса, спектр қалай өзгереді?

7.

Берілген үшбұрышты сигнал:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau}, & -\tau \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{басқа жағдайларда.} \end{cases}$$

Тапсырмалар:

1. Фурье түрлендіруін есептеңіз.
2. Оның тікбұрышты импульспен салыстырғанда жиілік аймағындағы ерекшеліктерін талдаңыз.

8.

Берілген сигнал:

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t),$$

мұндағы $m(t)$ баяу өзгертін ақпараттық сигнал, ал f_c — тасымалдаушы жиілік.

Тапсырмалар:

1. Егер $m(t)$ тікбұрышты импульс болса, спектр қалай көрінеді?
2. Егер $m(t)$ синусоидалық сигнал болса, спектр қалай өзгереді?
3. Осы сигналды байланыс жүйесінде қолданудың артықшылықтары қандай?